Zadanie 4.

Funkcję użyteczności Pawła opisuje wzór $U_P(x_{P1},x_{P2})=x_{P1}^{1/3}x_{P2}^{2/3}$, zaś Gawła $U_G(x_{G1},x_{G2})=x_{G1}^{1/2}x_{G2}^{1/2}$. Paweł dysponuje alokacją początkową $\omega_{P1}=1$, $\omega_{P2}=0$, zaś Gaweł $\omega_{G1}=0$, $\omega_{G2}=1$. Jedyny dochód, jakim mogą dysponować pochodzi ze sprzedaży części alokacji początkowej. Zakładając, że ceny p_1 oraz p_2 dóbr x_1 oraz x_2 są ustalane przez bezstronnego arbitra-licytatora, przy jakiej ich proporcji nastąpi równowaga wymiany pomiędzy Pawłem i Gawłem?

Rozwiązanie

Preferencje Cobb-Douglas'a => zerowa konsumpcja któregoś z dóbr prowadzi do U=0 => każda alokacja z niezerową ilością poprawi użyteczność konsumentów => alokacja początkowa nie jest efektywna w sensie Pareto.

Warunek efektywnej alokacji: $MRS_G = MRS_P = \frac{P_1}{P_2}$

$MRS_G = \frac{\frac{1}{2}x_{G1}^{-1/2}x_{G2}^{1/2}}{\frac{1}{2}x_{G1}^{1/2}x_{G2}^{-1/2}} = \frac{x_{G2}}{x_{G1}}$ oraz $MRS_P = \frac{\frac{1}{3}x_{P1}^{-2/3}x_{P2}^{2/3}}{\frac{2}{3}x_{P1}^{1/3}x_{G2}^{-1/3}} = \frac{x_{P2}}{2x_{P1}}$ => $\frac{x_{G2}}{x_{G1}} = \frac{x_{P2}}{2x_{P1}}$

Warunek alokacji osiągalnej:

- X_1: $x_{P1} + x_{G1} = 1$ => $x_{G1} = 1 - x_{P1}$
- X_2: $x_{P2} + x_{G2} = 1$ => $x_{G2} = 1 - x_{P2}$

Podstawiamy do MRS wartości uzależnione od x_{P1} i x_{P2} => $\frac{1-x_{P2}}{1-x_{P1}} = \frac{x_{P2}}{2x_{P1}}$ => $\boldsymbol{x_{P2} = \frac{2x_{P1}}{1+x_{P1}}}$

jest to **krzywa kontraktu**

Zakładamy p_2, jako numéraire, czyli równą 1.

Jednostki mogą się wymieniać, ale musi być to alokacja dopuszczalna, czyli równanie budżetowe:

$x_{P1}p_1 + x_{P2}p_2 = w_{xp1}p_1 + w_{xp2}p_2 = m_p$ oraz $x_{G1}p_1 + x_{G2}p_2 = w_{xG1}p_1 + w_{xG2}p_2 = m_G$

$x_{P1}p_1 + \frac{2x_{P1}*p_1}{p_2} * p_2 = m_p$ lub

$x_{P1}p_1 + x_{P2} * 1 = 1 * p_1 + 0 * 1 = p_1$

$x_{P1} = \frac{p_1 - x_{P2}}{p_1} = \frac{1}{3}\frac{m_p}{p_1}$

$MRS_P = \frac{P_1}{P_2}$ => $\frac{x_{P2}}{2x_{P1}} = \frac{p_1}{1}$ => $p_1 = \frac{x_{P2}}{2x_{P1}}$

Podstawiamy p_1 do x_{P1}:

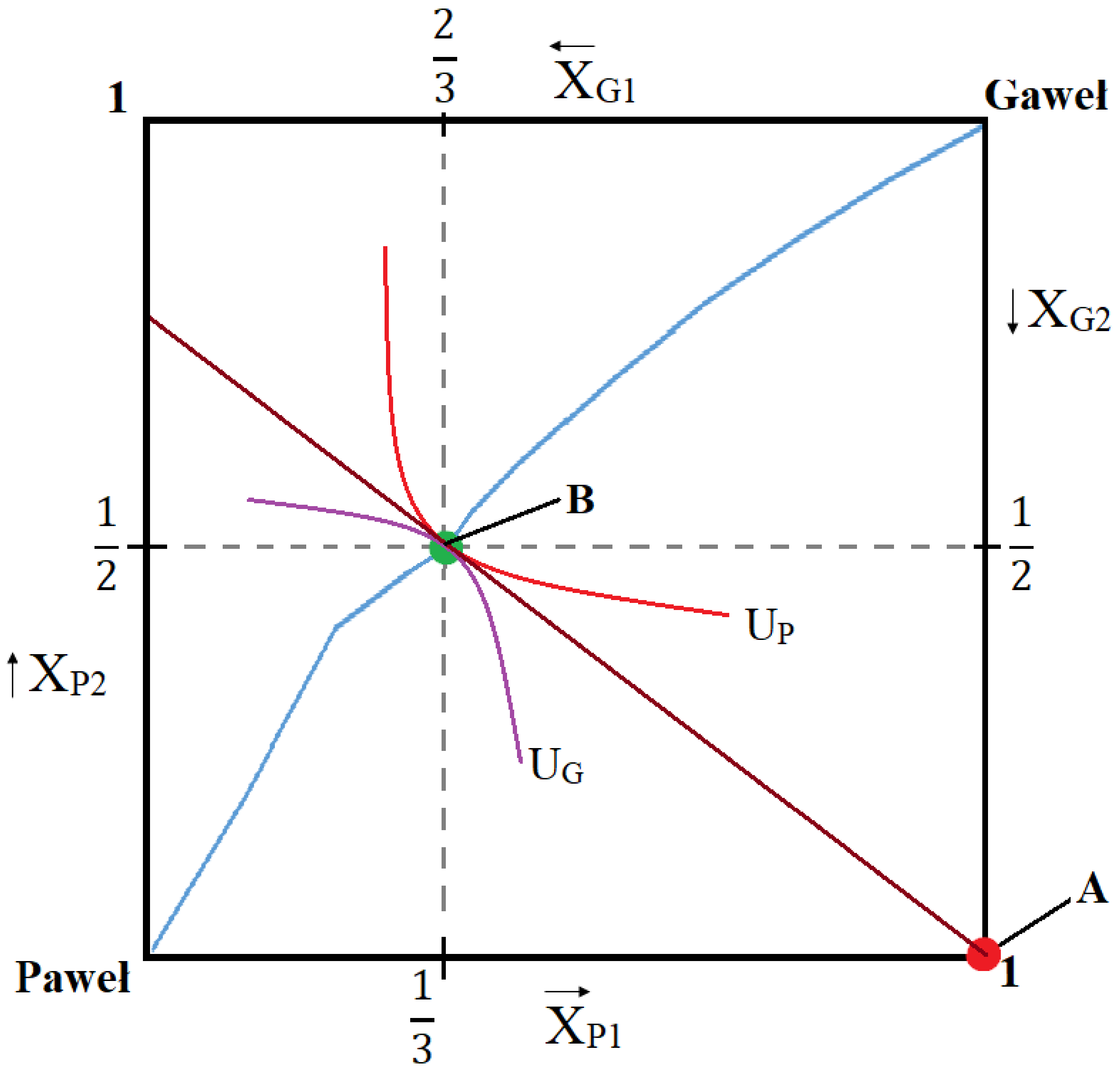
$x_{P1} = \frac{\frac{x_{P2}}{2x_{P1}} - x_{P2}}{\frac{x_{P2}}{2x_{P1}}}$ => $x_{P1} = 1 - 2x_{P1}$ => $\boldsymbol{x_{P1} = \frac{1}{3}}$

$\boldsymbol{x_{P2}} = \frac{2x_{P1}}{1 + x_{P1}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$ => $\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_{P2}}{2x_{P1}} = \frac{3}{4}$

$\boldsymbol{x_{G1}} = 1 - x_{P1} = 1 - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

$\boldsymbol{x_{G2}} = 1 - x_{P2} = 1 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

Wniosek: wymiana $\frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{4}$ spowodowała jednoczesną poprawę dla Pawła i Gawła, gdyż każdy z nich ma U>0 (w porównaniu z U_0=0). Alokacja końcowa mieści się na krzywej kontraktu $x_{P2} = \frac{2x_{P1}}{1+x_{P1}}$ (czyli mamy efektywność Pareto).



2/3
$\overleftarrow{X_{G1}}$
1
Gaweł
$\downarrow X_{G2}$
1/2
B
1/2
U_P
$\uparrow X_{P2}$
U_G
A
Paweł
1
1/3
$\overrightarrow{X_{P1}}$